Une figure intéressante

Dany-Jack MERCIER
IUFM
des Antilles et de la Guyane

Cet article présente des remarques sur l'exploitation d'une figure particulièrement riche et qui permet notamment de justifier aux yeux des élèves de Troisième l'introduction de la somme de deux vecteurs.

I- Premières idées autour d'une figure.

Exercice n°1

On considère la figure 1 où *ABCD* est un parallélogramme et où *A, B, C* et *D* sont les milieux respectifs des segments *[DD']*, *[AA']*, *[BB']* et *[CC']*. Quelle est la nature du quadrilatère *A'B'C'D'*?

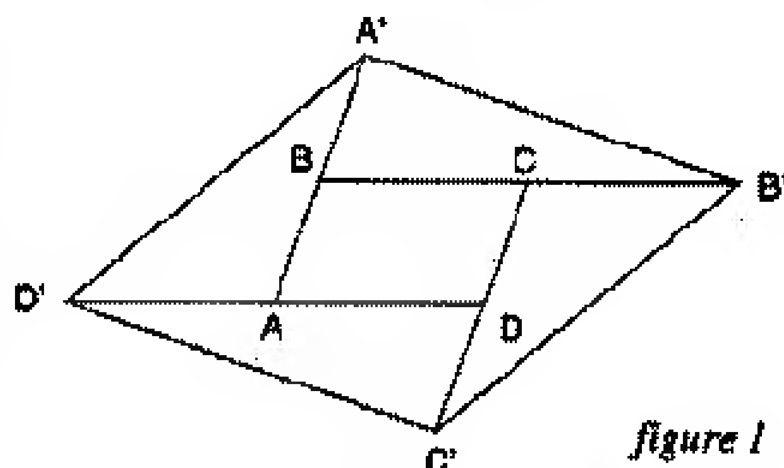


figure 1

La question est délibérément ouverte pour que les investigations des élèves soient libérées de toute contrainte méthodologique. Montrer que l'on a un parallélogramme, c'est utiliser l'une des deux caractérisations qui doivent

être connues d'un élève de Collège :

C1 : Si les côtés d'un quadrilatère sont parallèles deux à deux, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
C2 : Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

A ces deux caractérisations, on peut ajouter la caractérisation C3, qui n'est qu'un leurre en général, la condition 3 se démontrant souvent en vérifiant que *(BC)* est parallèle à *(AD)*, ce qui revient à utiliser C1 :

C3 : Si *ABCD* vérifie
1) $AB = CD$.
2) $(AB) // (CD)$.
3) *B* et *C* sont dans le même demi-plan de frontière *(AD)*
alors c'est un parallélogramme.

Les utilisations de C1, C2 ou C3 sont assez malaisées. Un point de départ possible est le quadrilatère *A'CC'A*.

Démonstration n°1.1 : On montre d'abord que *A'CC'A* est un parallélogramme en utilisant C3. Ainsi *[A'C']* et *[AC]* ont le même milieu *O*. De la même façon, *BB'DD'* est un parallélogramme et *[BD]* et *[B'D']* auront même milieu.

O étant le milieu commun aux diagonales *[AC]* et *[BD]* du parallélogramme *ABCD*, on déduit que *O* sera le milieu de *[A'C']* et de *[B'D']* et l'on peut conclure par C2.

Inconvénient : on admet ici que *A'* et *C* sont dans le même demi-plan de frontière *(AC')*. Si on le démontre, on alourdit la démonstration.

L'introduction de la symétrie centrale par rapport au centre *O* du parallélogramme *ABCD* ouvre de nouveaux horizons et permet d'approfondir le lien existant entre «symétrie centrale» et «parallélogramme», au cœur du programme de Cinquième.

Démonstration n°1.2 : Soit *O* le centre de *ABCD*. Les symétriques de *C* et *D* par rapport à *O* sont *A* et *B*. *D* étant le milieu de *[CC']* et la symétrie centrale conservant les milieux, *B* sera le milieu de *[AA"]* où *A"* désigne le symétrique de *C'*. Par suite $A" = A'$ donc *C'* et *A'* sont symétriques par rapport à *O*.

On montre, de même, que *O* est le milieu de *[B'D']* et l'on peut conclure en utilisant C2.

Dans une classe de Troisième où l'on aurait déjà étudié les coordonnées des vecteurs, on peut avoir l'idée d'une nouvelle démonstration en reproduisant la figure sur papier quadrillé :

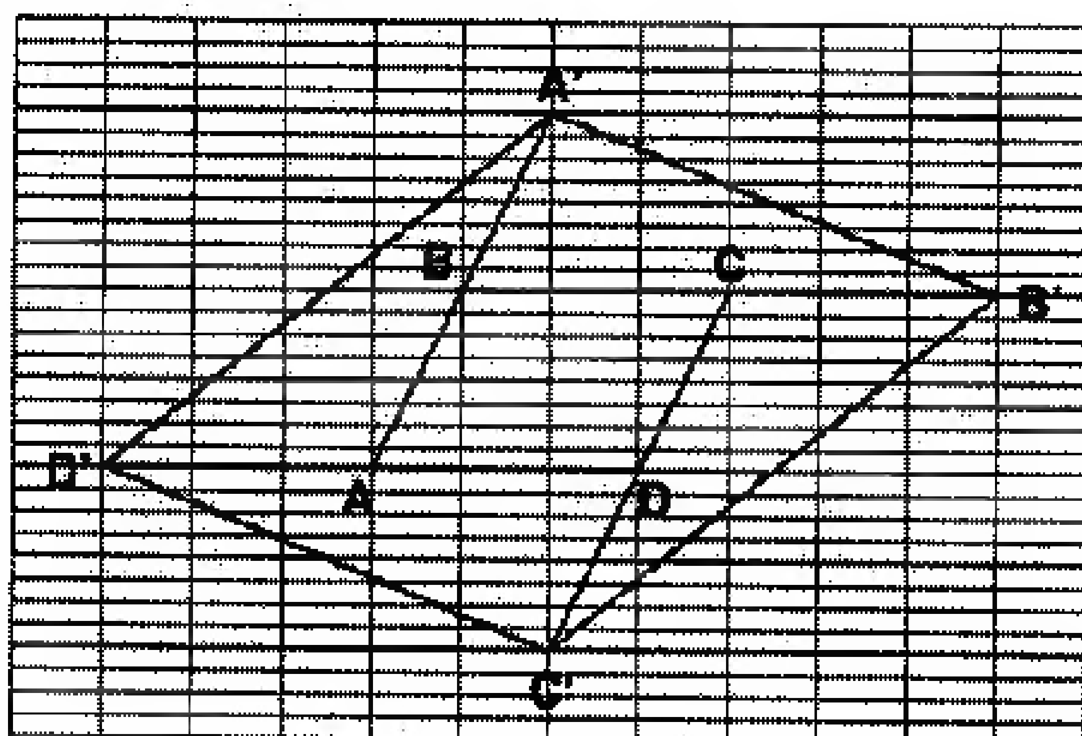


figure 2

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A'B}$ de la figure 2 sont obtenues en évaluant les déplacements horizontaux, puis verticaux, permettant d'aller de A' en B. Si l'on note ← 1 le déplacement de 1 carreau vers la gauche, etc., on voit que l'on passe de A' à B par la succession de déplacements : ← 1, ↓ 2, ce que l'on traduit en disant que «les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A'B}$ sont (− 1, − 2)». Enfin le cours se charge de montrer que 2 vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les même coordonnées. Alors :

Démonstration n°I.3 : (fig.2)

On passe de A' à B' par la succession de déplacements suivants : ← 1, ↓2 suivi de → 3, ↓0 puis de → 3, ↓ 0

Les déplacements de B à C et de C à B' sont identiques puisque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$. On résume le trajet de A' à B' par → 5 , ↓ 2, ou encore $\overrightarrow{A'B'}$ (5, − 2).

En recommençant de D' à C' :
→ 3, ↓ 0 puis → 3, ↓ 0 puis ← 1, ↓ 2 qui se résume par → 5 , ↓ 2 ou

$\overrightarrow{D'C'}(5, -2)$. Et l'on déduit $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. CQFD.

Une idée proche de la démonstration n°1.3 serait de calculer les coordonnées des milieux des segments *[A'C']* et *[B'D']* et de conclure par C2. Cette idée me paraît remarquable - et à remarquer ! - si elle vient d'un élève de Troisième qui me montre, par ce biais, qu'il a compris comment le travail dans un repère, avec des coordonnées, s'avère un outil puissant de résolution de problèmes.

Démonstration n°1.4 : Avec des notations évidentes,

$$\left.\begin{array}{l} x_{A'} = -x_A + 2\,x_B \\ \\ x_{C'} = -x_C + 2\,x_D \end{array}\right| \text{entraînent } \frac{x_{A'} + x_{C'}}{2} = -\frac{x_A + x_C}{2} + x_B + x_D = \frac{x_B + x_D}{2}.$$

De même $\dfrac{x_{B'} + x_{D'}}{2} = -\dfrac{x_B + x_D}{2} + x_A + x_C = \dfrac{x_B + x_D}{2}$

D'où $\dfrac{x_{A'} + x_{C'}}{2} = \dfrac{x_{B'} + x_{D'}}{2}$ Et il ne reste plus qu'à recommencer avec les ordonnées...

Une façon judicieuse d'employer l'exercice n°1 est de l'utiliser en Troisième *pour justifier l'apprentissage de l'addition des vecteurs à ce niveau.*

Les démonstrations 1.3 et 1.4 nécessitent un bon entraînement dans l'utilisation des coordonnées. La démonstration 1.4 n'est pas visuelle et demande à l'élève de localiser parfaitement les hypothèses et les conclusions écrites sous la forme d'équations. C'est assez difficile en Troisième. Enfin les démonstrations géométriques «habituelles» 1.1 et 1.2 ne sont pas perçues comme simples dans une classe de Collège qui risque d'être stupéfaite par la simplicité - et la nouveauté - des arguments de la démonstration n°1.5.

Il sera en outre facile de *visualiser la preuve* au tableau en colorant les vecteurs égaux intéressants sur la figure ... et il n'en manque pas !

Démonstration n°1.5 :

Montrer que *A'B'C'D'* est un parallélogramme revient à prouver que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. On a :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'}$$

$$\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC'}$$

et on vérifie facilement que $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC'}$ tandis que $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D'A}$ CQFD.

II- Le déroulement de l'activité en Troisième.

Je proposais l'exercice n°1 juste après avoir travaillé sur la relation de Chasles. Les élèves se succédaient au tableau pour compléter le dessin de la figure 1, puis apparaissait, imposant, le parallélogramme *A'B'C'D'*. Une construction aussi simple menant à un résultat si visible ne devait donner lieu qu'à une démonstration simple. Aussi les élèves avaient-ils 10 à 15 minutes pour justifier un tel parallélogramme.

a) Mise en commun des résultats.

Les élèves exposent leurs idées et toute la classe en discute. On en profite pour rappeler les caractéristiques C1, C2 et C3. La démonstration n°1.1 est ébauchée sans pouvoir conclure «vraiment», ayant toujours à se persuader que le quadrilatère *A'CC'A* n'est pas croisé. La démonstration n°1.2 n'est pas trouvée.

b) L'introduction des vecteurs.

C'est alors que je décide de colorier de la même façon tous les vecteurs égaux apparaissant au tableau. Les réponses ne se font pas attendre, certains élèves allant même jusqu'à fournir la solution complète (démonstration n°1.4) que je recopie au fur et à mesure au tableau. On vérifie, ensemble, que cette solution est acceptable, puis on valide. La démonstration n°1.4 nous a rassuré sur la simplicité de la preuve et a montré, sur un exemple simple, combien l'utilisation de la relation de Chasles et de la caractérisation :

M milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ pouvait être précieuse.

Elle permet de transformer un exercice de géométrie classique, qui pose problème aux élèves, en un exercice simple aux allures algébriques.

c) L'ouverture sur d'autres problèmes.

L'incapacité de donner une solution géométrique rigoureuse nous inquiète tous. On dégage alors l'existence d'un centre de symétrie pour préparer, pour le cours suivant, une démonstration du type n°1.2.

Suivant l'intérêt manifesté par la classe, on peut envisager les prolonge-

ments du III:

III- Quelques prolongements.

Exercice n°2:

On considère la même construction qu'à l'exercice n°1 mais on suppose, cette fois-ci, que $ABCD$ est un carré. Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$?

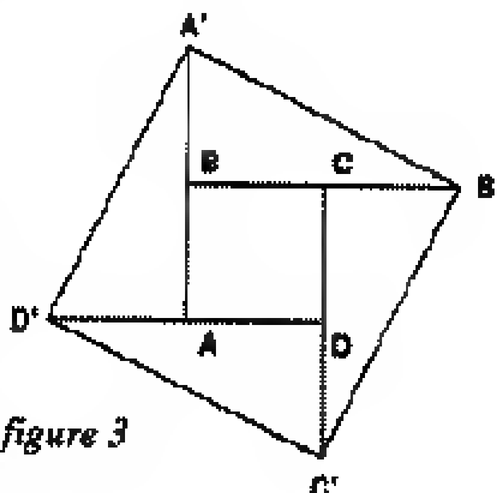


figure 3

Démonstration n°2.1:

Il suffit d'adapter la démonstration n°1.2 en remplaçant la symétrie centrale par la rotation de centre O et d'angle 90° transformant A en B pour constater que cette rotation transforme aussi $A'B'C'D'$ en $B'C'D'A'$.

Démonstration n°2.2 :

En classe de Première, on pourra utiliser le produit scalaire pour vérifier que l'angle $\widehat{D'A'B'}$ est droit :

$$\overrightarrow{D'A'}.\overrightarrow{A'B'} = \left(\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AA'}\right).\left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'}\right) = \overrightarrow{D'A}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B}$$
$$= 2 - 2 = 0$$

puis achever en notant que $A'B'C'D'$ est déjà un parallélogramme (d'après l'exercice n°1) et que $A'B' = A'D'$ (d'après Pythagore).

L'exercice n°2 peut être utilisé dès la Quatrième comme application du théorème de Pythagore :

Démonstration n°2.3 :

$A'KC'$ est rectangle en K, donc $A'C' = \sqrt{l^2 + 9l^2} = l\sqrt{10}$ en posant $AB = l$. De même $B'D' = l\sqrt{10}$.

$A'B'C'D'$ est donc un parallélogramme

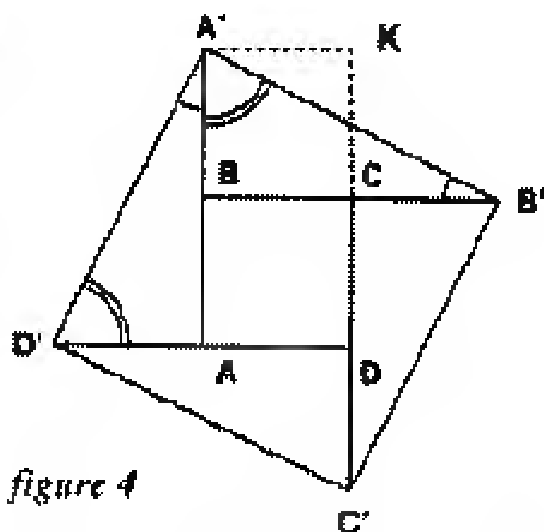


figure 4

(d'après la démonstration n°1.2) dont les diagonales sont égales : ce sera donc un rectangle.
Toujours d'après Pythagore :

$A'B' = \sqrt{l^2 + 4l^2} = l\sqrt{5}$ et $B'C' = l\sqrt{5}$ de sorte que $A'B'C'D'$ soit bien un carré. CQFD.

Une variante de cette démonstration 2.3 consiste à montrer que $A'B'C'D'$ est un rectangle en prouvant que l'angle $\widehat{D'A'B'}$ est droit, ce qui est clair vu que les triangles rectangles superposables apparaissent dans la figure 4.

Exercice n°3 :

Si *ABCD* est un losange, peut-on affirmer que *A'B'C'D'* en sera encore un ?

Un dessin permet de s'assurer que non. Mais on peut aller plus loin dans le cadre du programme de Terminale :

Exercice n°4 :

On suppose que *ABCD* est un losange et on considère la construction de l'exercice n°1. A quelles conditions sur *ABCD* le quadrilatère *A'B'C'D'* obtenu sera-t-il un losange ?

Démonstration n°4.1 :

On a $A'B'^2 = BA'^2 + BB'^2 - 2BA'.BB' \cos(\pi - \beta)$
$= 5l^2 + 4l^2 \cos\beta$.
De même $B'C'^2 = 5l^2 + 4l^2 \cos\alpha$.

A'B'C'D' sera donc un losange ssi $A'B' = B'C'$, c'est-à-dire $\cos\alpha = \cos\beta$. Comme $\alpha + \beta = \pi$ et $0 < \alpha < \pi$, cette condition équivaut à $\alpha = \beta = \pi/2$ c'est-à-dire à *ABCD* est un carré. CQFD.

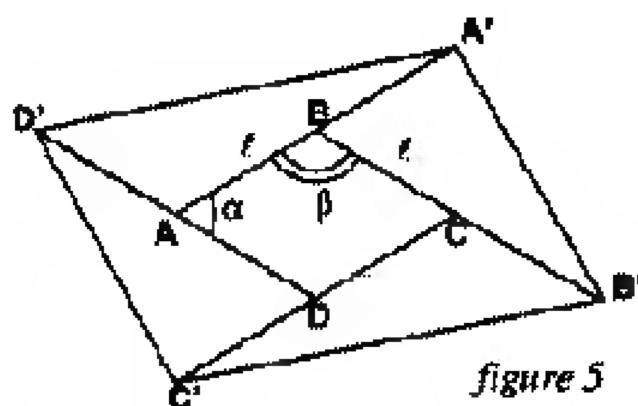


figure 5

On aurait tout de même bien aimé obtenir un losange *ABCD* qui ne soit pas un carré et l'exercice n°4 nous laisse sur notre faim. Aussi semble-t-il naturel de se poser la question suivante :

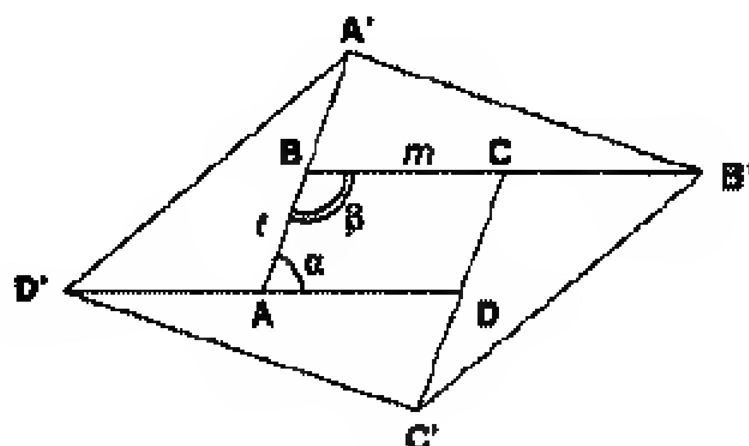


figure 6

Exercice n°5 :

Sur la figure 6, *ABCD* étant un parallélogramme, est-il possible que *A'B'C'D'* soit un losange ?

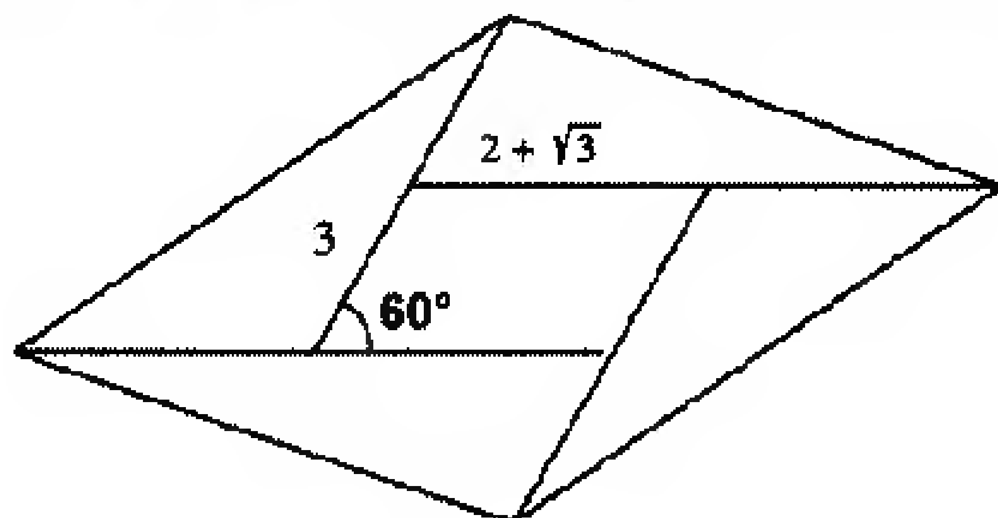
A'B'C'D' sera un losange ssi $A'B'^2 = B'C'^2$. Comme $A'B'^2 = l^2 + 4m^2 + 4lm \cos\beta$ et $B'C'^2 = m^2 + 4l^2 + 4lm \cos\alpha$, cela se traduira en disant que m/l est solution de l'équation du second degré en X :

$$3X^2 - 8 \cos\alpha . X - 3 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc :

$$\frac{m}{l} = \frac{4\cos\alpha + \sqrt{9 + 16\cos^2\alpha}}{3}$$

Pour un choix de α, il existe donc un seul parallélogramme *ABCD*, à une



similitude près, qui réponde à la question.

Exemple : Prenons $l = 3$ et $\alpha = \pi/3$, on obtient $m = 2 + \sqrt{3} \approx 5,6$ et la figure 7.

Sous l'éclairage des complexes.

Notons *a, b, c, d, a', b', c', d'* les affixes des points *A, B, ... D'* de la figu-

re I et f l'application de $\mathbb{C}^4$ dans $\mathbb{C}^4$ qui à (a,b,c,d) associe (a',b',c',d'). On a

$$\begin{cases} a = \dfrac{d+d'}{2} \\ b = \dfrac{a+a'}{2} \\ c = \dfrac{b+b'}{2} \\ d = \dfrac{c+c'}{2} \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} a' = 2b - a \\ b' = 2c - b \\ c' = 2d - c \\ d' = 2a - d \end{cases} \qquad (S)$$

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$ est inversible, donc f sera bijective tout comme l'application F qui a un quadrilatère $ABCD$ associe le quadrilatère $A'B'C'D'$.

Si $A'B'C'D'$ est donné, il est d'ailleurs facile d'obtenir $a = \dfrac{1}{15}(a' + 2b' + 4c' + 8d')$ d'où A puis B milieu de $[AA']$, etc.

L'utilisation des complexes nous donne une nouvelle preuve facile de l'exercice n°1 :

$ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\dfrac{b+d}{2} = \dfrac{a+c}{2}$ (1)

$A'B'C'D'$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\dfrac{b'+d'}{2} = \dfrac{a'+c'}{2}$ (2)

et l'on vérifie que (1) $\Leftrightarrow$ (2) grâce au système (S).

On en montre même un peu plus : que l'application F induit une bijection de l'ensemble des parallélogrammes dans lui-même.

Il est aussi possible d'envisager un triangle équilatéral ou tout autre polygone régulier convexe à la place du parallélogramme $ABCD$.

Exercice n°6 :

Le triangle ABC de la figure 6 est équilatéral. De plus, A, B et C sont les milieux respectifs de $[CC']$, $[AA']$ et $[BB']$.
Montrer que le triangle $A'B'C'$ est encore équilatéral.

L'exercice est accessible dès la Troisième grâce aux rotations :

Démonstration n°6.1 :

Soit O le centre de gravité du triangle ABC. La rotation de centre O et amenant A sur B est d'angle 120° (pour une orientation du plan convenable). Elle transforme B en C et C en A. Conservant les milieux, elle transformera aussi A' en B', B' en C' et C' en A'. Le triangle $A'B'C'$ sera bien équilatéral.

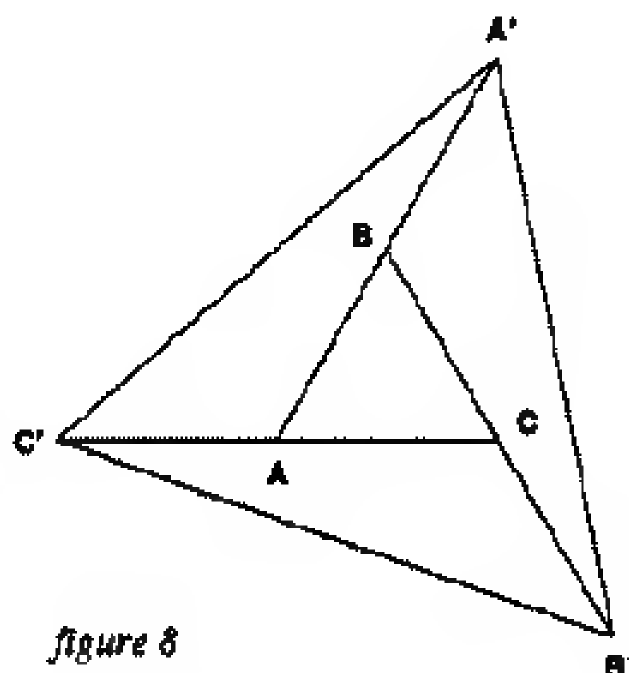


figure 8

Par contre, en Terminale, deux autres méthodes au moins sont disponibles :

Démonstration n°6.2 :

Dans un repère orthonormal convenable, les points A, B et C auront pour affixes 1, j et j^2. En notant a', b', c' les affixes des points A', B', C', on aura :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{a'+1}{2}=j \\[2mm] \dfrac{b'+j}{2}=j^2 \\[2mm] \dfrac{c'+j^2}{2}=1 \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left|\begin{array}{l} a'=2j-1 \\ b'=j(2j-1) \\ c'=j^2(2j-1) \end{array}\right.$$

ce qui montre que $A'B'C'$ est équilatéral.

Démonstration n°6.3 :

Dans le triangle $A'BB'$:

$$A'B'^2 = l^2 + 4l^2 - 2l.2l.\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 7l^2$$

où $l = AB$. Donc $A'B' = l\sqrt{7}$ et il suffit de recommencer avec $B'C'$ et $C'A'$.

Et comme je brûle d'envie de le faire, je finirai par l'énoncé d'un problème voisin posé par le mathématicien arabe Abul Wafa (X° siècle) dans son livre *«Constructions géométriques nécessaires à l'artisan»*, et que l'on trouve dans *«l'Histoire des Mathématiques pour les Collèges»* (IREM Paris VII, Cedic, 1980). Il permet d'utiliser les rotations à la manière de la démonstra-

tion n°2.1 et peut être proposé avec profit après une séquence de travail sur l'exercice n°1 :

Exercice n°7 :

Abul Wafa propose de construire un carré à partir de 3 carrés identiques. Il en découpe 2 suivant une diagonale et dispose les morceaux obtenus comme indiqué dans la figure 9.
a) Prouver que *ABCD* est un carré.
b) Calculer *AB*.
c) Montrer que *MNB* et *SNA* sont symétriques par rapport au point *N*, ce qui permettra une découpe facile et la reconstitution d'un seul grand carré.

Démonstration n°9.1

a) *L'image de* A *par la rotation de centre* O *et d'angle 90° est* B.

En effet, cette rotation r transforme S en T, et la droite (SA) perpendiculaire à (OS) en la perpendiculaire à (OT) en T, c'est-à-dire (TB). r transforme aussi A' en B' (car $SA' = TB'$ et $[SV]$ est transformé en $[TS]$) donc transformera la perpendiculaire à (SV) en A', c'est-à-dire (AA'), en la perpendiculaire à (TS) en B', c'est-à-dire (BB'). Finalement $r(A) \in (TB) \cap (BB')$ donc $r(A) = B$.

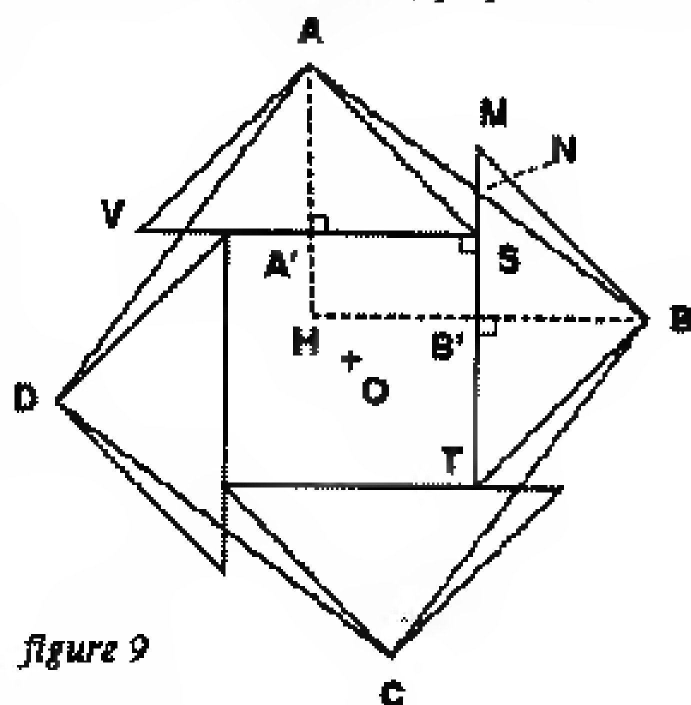


figure 9

b) $AB = a\sqrt{3}$ où $a = ST$.

c) $AN = NB$ d'après Thalès dans le triangle BHA. Thalès permet aussi le calcul de NS:

$$\frac{NB'}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow NB' = \frac{a}{2} \Rightarrow NS = NB' - SB' = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}$$

Donc $MN = MT - NT = MT - (NS + SB' + B'T) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - \dfrac{a}{2}$, tous calculs faits. CQFD.

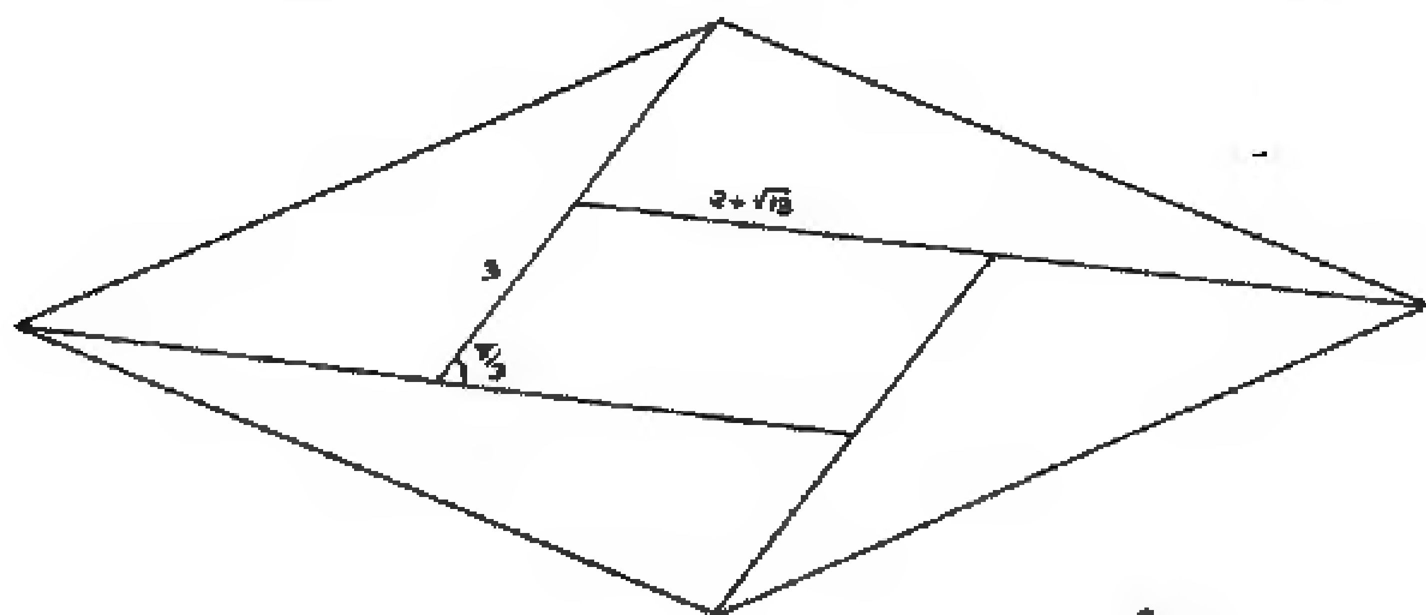


Fig. 7